$3^{η}$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

21.

Έστω η υπερβολή $9x^2-y^2=32$. Να βρείτε

i) Τις ασύμπτωτες και την εκκεντρότητα της υπερβολής.

ii) Τις εφαπτόμενες της υπερβολής που είναι παράλληλες στην ευθεία $(ε):\ 9x+y+9=0$

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής και την ευθεία $y=6$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η υπερβολή γράφεται $\dfrac{x^2}{\frac{32}{9}}-\dfrac{y^2}{32}=1$, οπότε $α^2=\dfrac{32}{9} \Leftrightarrow α=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$,

$β^2=32 \Leftrightarrow β=4\sqrt{2}$

και $β^2=γ^2-α^2 \Leftrightarrow$

$32=γ^2-\dfrac{32}{9}$

$γ=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$

Ασύμπτωτες : $y=\pm\dfrac{β}{α}x \Leftrightarrow y=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}x \Leftrightarrow y=\pm 3x$

Εκκεντρότητα : $ε=\dfrac{γ}{α}=\sqrt{10}$

ii)

Αν $P(x_1 , y_1)$ είναι σημείο επαφής, η εφαπτομένη σ' αυτό είναι

$\dfrac{xx_1}{\frac{32}{9}}-\dfrac{yy_1}{32}=1 \Leftrightarrow 9xx_1-yy_1=32$ **(1)**

Εφαπτομένη // (ε) $\Leftrightarrow λ_{εφ}=λ_ε \Leftrightarrow \dfrac{9x_1}{y_1}=-9 \Leftrightarrow x_1=-y_1$ **(2)**

Το $P(x_1, y_1)$ ανήκει στη υπερβολή $\Leftrightarrow 9x_1^2-y_1^2=32$ **(3).**

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε

$(x_1=2$ και $y_1=-2)$ ή $(x_1=-2$ και $y_1=2)$

Δηλαδή τα σημεία επαφής είναι τα $(2 , -2)$ και $(-2 , 2)$

Η (1) γίνεται $9x+y=16$ ή $9x+y=-16$

iii)

Τα σημεία τομής των ασύμπτωτων $y=\pm 3x$ με την ευθεία $y=6$ (λύνοντας τα συστηματάκια) βρίσκουμε ότι είναι τα $Γ(2 , 6)$ και $Δ(-2, 6)$.

Το τρίγωνο του οποίου ζητάμε το εμβαδόν είναι το ΟΓΔ .

Είναι $ΓΔ \parallel x'x$ με $(ΓΔ)=4$ και $d(O, ΓΔ)=6$.

Οπότε $(ΟΓΔ) = \frac{1}{2}(Γ\,Δ).\, d(O,\ ΓΔ) = 12$ τετραγωνικές μονάδες

22.

Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $M(4, 4)$.

i) Αν Κ είναι η προβολή του Μ στην διευθετούσα, και Ε η εστία, δείξτε ότι η μεσοκάθετη του ΚΕ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο Μ και διχοτομεί τη γωνία $K\hat{M}E$

ii) Αν η εφαπτομένη στο Μ τέμνει την διευθετούσα στο Ρ δείξτε ότι $PE \perp ME$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$2p = 4 \Rightarrow p = 2$

Είναι $E(1, 0)$ και $K(-1, 4)$

Εφαπτομένη στο Μ: $4y = 2(x + 4)$

$$2y = x + 4 \quad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη είναι μεσοκάθετη του ΚΕ.

Είναι $\lambda_{εφ} = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{KE} = \frac{0-4}{1-(-1)} = -2$

Οπότε $\lambda_{εφ} . \lambda_{KE} = -1 \Rightarrow εφ \perp KE$

Έστω Η το μέσο του ΚΕ.

Τότε $x_H = \frac{x_E + x_K}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ και $y_H = \frac{y_E + y_K}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$

Προφανώς, οι συντεταγμένες του Η επαληθεύουν την (1), άρα $H \in εφ$

ii)

Συντεταγμένες του Ρ: $\begin{cases} 2y = x + 4 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -1 + 4 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5 \\ x = -1 \end{cases}$

Είναι $\lambda_{ME} = \frac{0-4}{1-4} = -\frac{4}{3}$ και $\lambda_{PE} = \frac{0-1,5}{1-(-1)} = \frac{3}{4}$

Οπότε $\lambda_{ME} . \lambda_{PE} = -1 \Rightarrow PE \perp ME$.

Σημείωση : Το παραπάνω πρόβλημα ισχύει για οποιοδήποτε σημείο Μ της παραβολής .

23.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ **(1)**, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

A) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή των λ και μ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

B) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$, να δείξετε ότι

i) Όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να βρείτε τα λ και μ έτσι ώστε αν η ευθεία (ε): $x + y + 2 = 0$ τέμνει έναν από τους κύκλους της (1) στα σημεία Α και Β να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ (Ο η αρχή των αξόνων)

iii) Για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ.

Προτεινόμενη λύση

A)

Επειδή $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36\mu^2 + 64\lambda^2 > 0$, η (1) είναι εξίσωση κύκλου, και επειδή επαληθεύεται για $x = y = 0$ ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B)

i)

Το κέντρο του τυχαίου κύκλου της (1) είναι $K\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right) = K(-3\mu,\ -4\lambda)$

Αν $K(x,\ y)$, τότε $(x = -3\mu$ και $y = -4\lambda)$ **(2)**

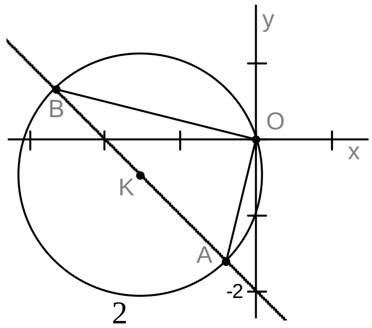
Όμως $3\mu + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\mu = -2\lambda$

Οπότε η (2) γίνεται $(x = 2\lambda$ και $y = -4\lambda) \Leftrightarrow$

$(x = 2\lambda$ και $y = -2x)$

Η εξίσωση $y = -2x$ είναι εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ii)



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow OA \perp OB$

$AOB = 90^o$

AB διάμετρος

$K \in (\varepsilon)$

$-3\mu - 4\lambda + 2 = 0$

Λύνοντας το σύστημα των

$3\mu + 2\lambda = 0$ και $-3\mu - 4\lambda + 2 = 0$ βρίσκουμε $\lambda = 1$ και $\mu = -\dfrac{2}{3}$

iii)

Για $\lambda = 1$ και $\mu = -\dfrac{2}{3}$ η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 64}}{2} = 2\sqrt{5}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ δίνεται από τον τύπο

$E = \frac{1}{2}(AB) \cdot d(O, AB)$

Η AB είναι διάμετρος του κύκλου άρα $(AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$

$d(O, AB) = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $x + y + 2 = 0$)

Άρα $E = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10}$ τετραγωνικές μονάδες

Σημείωση : Θα μπορούσαμε να βρούμε τα A και B λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ και $x + y + 2 = 0$ και παρατηρώντας ότι η γωνία AOB είναι ορθή να βρούμε το εμβαδόν από τον τύπο

$E = \frac{1}{2} OA \cdot OB$ ή από τον τύπο $E = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})|$

24.

Αν $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}$ και $|\overrightarrow{PA}|=6$, $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{P\Gamma}|=2\sqrt{3}$ να δείξετε ότι

i) Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

ii) Το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB

iii) Η γωνία $A\hat{P}B=90^o$

iv) Το διάνυσμα $\vec{v}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{A\Gamma}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρούμε σαν σημείο αναφοράς ένα από τα A , B , Γ π.χ το Γ

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma P}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Gamma P}+2\overrightarrow{\Gamma P}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma A}=-\overrightarrow{\Gamma B}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A} \quad \Rightarrow \quad A, B, \Gamma \text{ συνευθειακά}$$

ii)

Αφού $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}$ το Γ είναι μέσο του τμήματος A B

iii)

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{P\Gamma}$$

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})^2=4\overrightarrow{P\Gamma}^2$$

$$\overrightarrow{PA}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}^2=4\overrightarrow{P\Gamma}^2$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PB}|^2=4|\overrightarrow{P\Gamma}|^2$$

$$36+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+12=4\cdot 12$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \Rightarrow \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$$

iv)

Είναι $\vec{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma})\overrightarrow{A\Gamma}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma})(\overrightarrow{P\Gamma}-\overrightarrow{PA})$ **(1)**

Η υπόθεση $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{P\Gamma}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}$

Οπότε η (1) γίνεται $\vec{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\overrightarrow{PB}+\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right)\left(\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}-\overrightarrow{PA}\right)$

$$=\left(\frac{\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}}{2}\right)\left(\frac{\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}}{2}\right)$$

$$=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}^2+3\overrightarrow{PB}^2-3\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}}{4}$$

$$\overset{(iii)}{=}\frac{0-|\overrightarrow{PA}|^2+3|\overrightarrow{PB}|^2-0}{4}$$

$$=\frac{-36+3\cdot 12}{4}=0 \Rightarrow \vec{v}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$$

25.

i) Έστω οι αριθμοί $\kappa = 3\nu + 4$ και $\lambda = 4\nu + 5$, όπου ν ακέραιος.
Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $2\kappa + \lambda$ με το 10

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ακεραίου α με το 3 είναι 2.
Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2 με το 3 είναι 1.
Ακόμα να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^3 με το 9.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned}2\kappa + \lambda &= 6\nu + 8 + 4\nu + 5\\ &= 10\nu + 13\\ &= 10\nu + 10 + 3\\ &= 10(\nu + 1) + 3 = 10\mu + 3 \text{ , όπου } \mu = \nu + 1 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $2\kappa + \lambda$ με το 10 είναι $\upsilon = 3$

ii)

Από υπόθεση έχουμε $\alpha = 3\pi + 2$, $\pi \in \mathbb{Z}$

Τότε
$$\begin{aligned}\alpha^2 = (3\pi + 2)^2 &= 9\pi^2 + 12\pi + 4\\ &= 9\pi^2 + 12\pi + 3 + 1\\ &= 3(3\pi^2 + 4\pi + 1) + 1 = 3\gamma + 1, \text{ όπου } \gamma = (3\pi^2 + 4\pi + 1) \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2 με το 3 είναι 1

$$\begin{aligned}\alpha^3 = (3\pi + 2)^3 &= 27\pi^3 + 54\pi^2 + 36\pi + 8 =\\ &= 9(3\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi) + 8\\ &= 9\eta + 8 \text{ , όπου } \eta = 3\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^3 με το 9 είναι 8.

26.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

i) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1, ε_2

ii) Να δείξετε ότι οι οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι κάθετες.

iii) Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}(3, \kappa)$ να είναι παράλληλο στη μία από τις παραπάνω ευθείες και το διάνυσμα $\vec{\beta}(-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη.

iv) Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x΄x και διέρχεται από το σημείο M.

Προτεινόμενη λύση

i) $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0 \iff (x+3)^2 - y^2 = 0$

$(x + 3 + y)(x + 3 - y) = 0$

$x + 3 + y = 0$ ή $x + 3 - y = 0$

$y = -x - 3$ ή $y = x + 3$ δύο ευθείες ε_1, ε_2

ii)

$\lambda_1\lambda_2 = (-1).1 = -1 \Rightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

iii)

Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{\kappa}{3} > 0$ άρα $\vec{\alpha} \,//\, \varepsilon_2$ και $\dfrac{\kappa}{3} = 1 \iff \kappa = 3$

$\lambda_{\vec{\beta}} = -\dfrac{4\lambda}{16} < 0$ άρα $\vec{\beta} \parallel \varepsilon_1$ και $-\dfrac{4\lambda}{16} = -1 \iff \lambda = 4$

Οπότε $M(3, 4)$

iv)

Έστω $y^2 = 2px$ η ζητούμενη παραβολή.

Η παραβολή διέρχεται από το $M(3, 4) \Rightarrow 4^2 = 2p\cdot 3 \Rightarrow p = \dfrac{8}{3}$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης παραβολής είναι $y^2 = \dfrac{16}{3}x$.

27.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα .

ii) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $M(1, 2)$

iii) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ, τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\eta\mu^2\theta + 4$

$= 4(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) + 4$

$= 4 + 4 = 8 > 0$ Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο

Κέντρο του κύκλου : $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$

Ακτίνα του κύκλου : $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$

ii)

Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ με κέντρο $K(0, 1)$.

Είναι $\lambda_{MK} = \frac{2-1}{1-0} = 1$ και επειδή η εφαπτόμενη είναι κάθετη στη ΜΚ, θα είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -1$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - 2 = -1(x - 1) \Leftrightarrow$

$y = -x + 3$

iii)

Έστω $K(x, y)$ το κέντρο του τυχαίου από τους δοσμένους κύκλους.

Τότε $x = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \eta\mu\theta$ $\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta$

$x^2 + y^2 = 1$ κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

28.

i) Της υπερβολής $3y^2 - x^2 = 1$ να βρείτε τις εστίες τις κορυφές και τις εξισώσεις των ασύμπτωτων

ii) Δείξτε ότι η υπερβολή δεν διέρχεται από σημείο με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$3y^2 - x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{\frac{1}{3}} - x^2 = 1$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{3}, \quad \beta^2 = 1 \quad \text{και} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta = 1 \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Εστίες : $E'\left(0, \ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ και $E\left(0, \ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Κορυφές : $A'\left(0, \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $A\left(0, \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Ασύμπτωτες : $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ii)

$$3y^2 - x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{x^2 + 1}{3} \qquad \textbf{(1)}$$

Αν το x είναι ακέραιος, τότε $x = 3\pi$ ή $x = 3\pi + 1$ ή $x = 3\pi + 2$

- Όταν $x = 3\pi$, η (1) $\Rightarrow$ $y^2 = \frac{9\pi^2 + 1}{3} = 3\pi^2 + \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
- Όταν $x = 3\pi + 1$, η (1) $\Rightarrow$ $y^2 = \frac{(3\pi + 1)^2 + 1}{3} = \frac{9\pi^2 + 6\pi + 1 + 1}{3} = 3\pi^2 + 2\pi + \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- Όταν $x = 3\pi + 2$, η (1) $\Rightarrow$ $y^2 = \frac{(3\pi + 2)^2 + 1}{3} = \frac{9\pi^2 + 12\pi + 4 + 1}{3} = 3\pi^2 + 4\pi + \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$

Άρα η υπερβολή δεν διέρχεται από σημείο με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς.

29.

Σε ορθοκανονικό σύστημα Oxy θεωρούμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{O\Gamma} = (x-1,\ \ 2x-4) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\Delta} = (x-2,\ x-3)$$

i) Να βρείτε το x ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα.

ii) Για την μεγαλύτερη τιμή του x που βρήκατε, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το τμήμα ΓΔ.

iii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου στα Γ και Δ.

iv) Αν η εφαπτόμενη στο Γ τέμνει τον y΄y στο Β και η εφαπτόμενη στο Δ τέμνει τον x΄x στο Α, να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο το O(0,0) και δύο κορυφές της είναι τα Α, Β.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\overrightarrow{O\Gamma} \perp \overrightarrow{O\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{O\Delta} = 0$$

$$(x-1)(x-2) + (2x-4)(x-3) = 0$$

$$3x^2 - 13x + 14 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{7}{3}$$

ii)

Για $x = \frac{7}{3}$ είναι $\overrightarrow{O\Gamma} = \left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, άρα $\Gamma\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{O\Delta} = \left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$, άρα $\Delta\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

Το μέσο Κ του ΓΔ είναι το $K\left(\frac{5}{6},\ 0\right)$

και $(\Gamma\Delta) = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το Κ και ακτίνα $\rho = \frac{(\Gamma\Delta)}{2} = \frac{5}{6}$,

επομένως η εξίσωση του είναι $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{36}$

iii)

$\lambda_{K\Gamma} = \frac{4}{3}$ οπότε η εφαπτομένη στο Γ θα έχει $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ και επομένως εξίσωση

$$y-\frac{2}{3} = -\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{3}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη στο Δ έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{12}$

iv)

Το σημείο τομής Β της εφαπτομένης στο Γ με τον άξονα των y είναι $B\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$

Το σημείο τομής Α της εφαπτομένης στο Δ με τον άξονα των x είναι $A\left(-\frac{5}{9},\ 0\right)$

v)

Επειδή $\frac{5}{3} > \frac{5}{9}$, η έλλειψη θα έχει τον μεγάλο άξονα πάνω στον y y΄

με $\alpha = \frac{5}{3}$ και $\beta = \frac{5}{9}$.

Οπότε η εξίσωσή της θα είναι $\frac{x^2}{\frac{25}{81}} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$.

30.

i) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -2$, δείξτε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$

ii) Αν $\vec{\alpha} = (1,\ 2)$ και $\vec{\beta} = (2,\ 3)$

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

β) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x

Προτεινόμενη λύση

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,συν(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) + |\vec{\beta}|\,|\vec{\gamma}|\,συν(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = -2$

$$συν(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) + συν(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = -2 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά για οποιαδήποτε γωνία φ ισχύει $-1 \le συνφ \le 1$

Οπότε η (1) $\Rightarrow$ $συν(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) = -1$ και $συν(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = -1$

$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

Και επειδή $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, θα είναι $\vec{\beta}$ αντίθετο του $\vec{\alpha}$

και $\vec{\gamma}$ αντίθετο του $\vec{\beta}$.

Δηλαδή $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$

ii) α)

$\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = 5(1,\ 2) - 3(2,\ 3) = (-1,\ 1)$

Άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ii) β)

Αν ω είναι η γωνία του διανύσματος $\vec{\gamma}$ με τον άξονα των x, τότε

$εφω = \lambda_{\vec{\gamma}} = -1$, άρα $ω = 135^o$ ή $ω = 315^o$

Και επειδή το πέρας του διανύσματος είναι στο 2^o τεταρτημόριο θα είναι $ω = 135^o$.